

**Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»**

УТВЕРЖДЕНО

**Директор физтех-школы
прикладной математики и
информатики**

А.М. Райгородский

Рабочая программа дисциплины (модуля)

по дисциплине:	Случайные графы. Часть 1
по направлению:	Прикладная математика и физика
профиль подготовки:	Прикладная математика и информационные технологии Физтех-школа Прикладной Математики и Информатики кафедра дискретной математики
курс:	1
квалификация:	магистр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 1 (осенний) - Дифференцированный зачет

Аудиторных часов: 30 всего, в том числе:

лекции: 0 час.

семинары: 30 час.

лабораторные занятия: 0 час.

Самостоятельная работа: 15 час.

Всего часов: 45, всего зач. ед.: 1

Программу составили:

Д.А. Шабанов, д-р физ.-мат. наук, доцент, доцент

М.Е. Жуковский, канд. физ.-мат. наук, доцент

Программа обсуждена на заседании кафедры дискретной математики 05.03.2020

Аннотация

Курс посвящен классической теории случайных графов. Изучаются общая теория случайных подмножеств, распределения числа малых подграфов в случайном графе, эволюция случайного графа, вопросы о связности случайного графа.

1. Цели и задачи

Цель дисциплины

освоение основных понятий теории случайных графов.

Задачи дисциплины

- освоение студентами базовых знаний (понятий, концепций, методов и моделей) в области случайных графов;
- приобретение теоретических знаний и практических умений и навыков в области случайных графов;
- оказание консультаций и помощи студентам в проведении собственных теоретических исследований в области случайных графов.

2. Перечень формируемых компетенций

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
УК-6 Способен определять и реализовывать приоритеты собственной деятельности и способы ее совершенствования на основе самооценки	УК-6.1 Умеет решать задачи собственного личностного и профессионального развития, определять и реализовывать приоритеты совершенствования собственной деятельности
ОПК-1 Владеет системой фундаментальных научных знаний в области физико-математических наук	ОПК-1.1 Знает и способен использовать в профессиональной деятельности фундаментальные научные знания в области физико-математических наук
ОПК-3 Способен выбирать и (или) разрабатывать подходы к решению типовых и новых задач в области профессиональной деятельности, учитывая особенности и ограничения различных методов решения	ОПК-3.1 Способен анализировать задачу, планировать пути решения, предлагать и комбинировать способы решения
	ОПК-3.2 Способен использовать исследовательские методы при решении новых задач, применяя знания в различных областях науки (техники)
	ОПК-3.3 Владеет аналитическими и вычислительными методами решения, понимает и учитывает на практике границы применимости получаемых решений
ПК-1 Способен ставить, формализовывать и решать задачи, в том числе разрабатывать и исследовать математические модели изучаемых явлений и процессов, системно анализировать научные проблемы, получать новые научные результаты	ПК-1.1 Способен находить, анализировать и обобщать информацию об актуальных результатах исследований в рамках тематической области своей профессиональной деятельности
	ПК-1.2 Способен выдвигать гипотезы, строить математические модели для описания изучаемых явлений и процессов, оценивать качество разработанной модели
	ПК-1.3 Способен применять теоретические и (или) экспериментальные методы исследований к конкретной научной задаче и интерпретировать полученные результаты
ПК-3 Способен профессионально работать с исследовательским и испытательным оборудованием (приборами и установками, специализированными пакетами прикладных	ПК-3.3 Способен оценивать точность полученных экспериментальных (численных) результатов
	ПК-3.1 Понимает принципы работы используемого оборудования (специализированных пакетов прикладных программ)

специализированными пакетами прикладных программ) в избранной предметной области

ПК-3.2 Способен проводить эксперимент (моделирование) с использованием исследовательского оборудования (пакетов прикладных программ)

3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны

знать:

фундаментальные понятия, законы, теории случайных графов;
современные проблемы соответствующих разделов случайных графов;
понятия, аксиомы, методы доказательств и доказательства основных теорем в разделах, входящих в базовую часть цикла;
основные свойства соответствующих математических объектов;
аналитические и численные подходы и методы для решения типовых прикладных задач случайных графов.

уметь:

понять поставленную задачу;
использовать свои знания для решения фундаментальных и прикладных задач случайных графов;
оценивать корректность постановок задач;
строго доказывать или опровергать утверждение;
самостоятельно находить алгоритмы решения задач, в том числе и нестандартных, и проводить их анализ;
самостоятельно видеть следствия полученных результатов;
точно представить математические знания в области сложных вычислений в устной и письменной форме.

владеть:

навыками освоения большого объема информации и решения задач (в том числе, сложных);
навыками самостоятельной работы и освоения новых дисциплин;
культурой постановки, анализа и решения математических и прикладных задач, требующих для своего решения использования математических подходов и методов случайных графов;
предметным языком сложных вычислений и навыками грамотного описания решения задач и представления полученных результатов.

4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

4.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкости по видам учебных занятий

№	Тема (раздел) дисциплины	Трудоемкость по видам учебных занятий, включая самостоятельную работу, час.			
		Лекции	Семинары	Лаборат. работы	Самост. работа
1	Модели случайных графов		6		3
2	Пороговые вероятности для монотонных свойств		4		2
3	Пуассоновская теорема для числа малых подграфов в случайном графе		4		3
4	Эволюция случайного графа. Случай сильно разреженного графа		4		2
5	Теорема о гигантской компоненте в случайном графе		4		2
6	Теоремы о максимальной сложности компоненты внутри фазового перехода		8		3
Итого часов			30		15

Подготовка к экзамену	0 час.
Общая трудоёмкость	45 час., 1 зач.ед.

4.2. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

Семестр: 1 (Осенний)

1. Модели случайных графов

Теория случайных подмножеств конечных множеств Асимптотическая эквивалентность биномиальной и равномерной моделей

2. Пороговые вероятности для монотонных свойств

Малые подграфы в случайном графе, пороговая вероятность наличия фиксированного графа в случайном

3. Пуассоновская теорема для числа малых подграфов в случайном графе

Центральная предельная теорема для числа малых подграфов в случайном графе.

4. Эволюция случайного графа. Случай сильно разреженного графа

Унициклические компоненты в разреженном случайном графе

5. Теорема о гигантской компоненте в случайном графе

Структура случайного графа внутри фазового перехода

6. Теоремы о максимальной сложности компоненты внутри фазового перехода

Распределение степеней вершин в случайном графе. Пуассоновская предельная теорема для числа вершин фиксированной степени в случайном графе

5. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)

Учебная аудитория, оснащенная компьютером и мультимедийным оборудованием (проектор, звуковая система).

6.Перечень рекомендуемой литературы

Основная литература

1. Модели случайных графов [Текст]/А. М. Райгородский, -М., МЦНМО, 2016
2. Модели случайных графов [Текст] : [учеб. пособие для вузов] / А. М. Райгородский ; Летняя школа "Современная математика", Дубна, июль 2008 г. — М. : МЦНМО, 2011 .— 136 с.

Дополнительная литература

1. Графы. Алгоритмы на языке С [Текст] / В. В. Прут ; М-во образования и науки РФ, Моск. физ.-техн. ин-т (гос. ун-т) - М.МФТИ,2017

7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)

8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)

На занятиях используются мультимедийные технологии, включая демонстрацию презентаций.

В процессе самостоятельной работы обучающихся возможно использование таких программных средств, как Mathcad, MATLAB, Maple и др.

9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)

Рекомендуется успешно сдавать контрольные работы, так как это упрощает итоговую аттестацию по предмету.

ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)

по направлению:	Прикладные математика и физика
профиль подготовки:	Прикладная математика и информационные технологии Физтех-школа Прикладной Математики и Информатики кафедра дискретной математики
курс:	<u>1</u>
квалификация:	магистр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 1 (осенний) - Дифференцированный зачет

Разработчики:

Д.А. Шабанов, д-р физ.-мат. наук, доцент, доцент

М.Е. Жуковский, канд. физ.-мат. наук, доцент

1. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
УК-6 Способен определять и реализовывать приоритеты собственной деятельности и способы ее совершенствования на основе самооценки	УК-6.1 Умеет решать задачи собственного личностного и профессионального развития, определять и реализовывать приоритеты совершенствования собственной деятельности
ОПК-1 Владеет системой фундаментальных научных знаний в области физико-математических наук	ОПК-1.1 Знает и способен использовать в профессиональной деятельности фундаментальные научные знания в области физико-математических наук
ОПК-3 Способен выбирать и (или) разрабатывать подходы к решению типовых и новых задач в области профессиональной деятельности, учитывая особенности и ограничения различных методов решения	ОПК-3.1 Способен анализировать задачу, планировать пути решения, предлагать и комбинировать способы решения
	ОПК-3.2 Способен использовать исследовательские методы при решении новых задач, применяя знания в различных областях науки (техники)
	ОПК-3.3 Владеет аналитическими и вычислительными методами решения, понимает и учитывает на практике границы применимости получаемых решений
ПК-1 Способен ставить, формализовывать и решать задачи, в том числе разрабатывать и исследовать математические модели изучаемых явлений и процессов, системно анализировать научные проблемы, получать новые научные результаты	ПК-1.1 Способен находить, анализировать и обобщать информацию об актуальных результатах исследований в рамках тематической области своей профессиональной деятельности
	ПК-1.2 Способен выдвигать гипотезы, строить математические модели для описания изучаемых явлений и процессов, оценивать качество разработанной модели
	ПК-1.3 Способен применять теоретические и (или) экспериментальные методы исследований к конкретной научной задаче и интерпретировать полученные результаты
ПК-3 Способен профессионально работать с исследовательским и испытательным оборудованием (приборами и установками, специализированными пакетами прикладных программ) в избранной предметной области	ПК-3.3 Способен оценивать точность полученных экспериментальных (численных) результатов
	ПК-3.1 Понимает принципы работы используемого оборудования (специализированных пакетов прикладных программ)
	ПК-3.2 Способен проводить эксперимент (моделирование) с использованием исследовательского оборудования (пакетов прикладных программ)

2. Показатели оценивания компетенций

В результате изучения дисциплины «Случайные графы. Часть 1» обучающийся должен:

знать:

фундаментальные понятия, законы, теории случайных графов;
 современные проблемы соответствующих разделов случайных графов;
 понятия, аксиомы, методы доказательств и доказательства основных теорем в разделах, входящих в базовую часть цикла;
 основные свойства соответствующих математических объектов;
 аналитические и численные подходы и методы для решения типовых прикладных задач случайных графов.

уметь:

понять поставленную задачу;
 использовать свои знания для решения фундаментальных и прикладных задач случайных графов;
 оценивать корректность постановок задач;
 строго доказывать или опровергать утверждение;
 самостоятельно находить алгоритмы решения задач, в том числе и нестандартных, и проводить их анализ;
 самостоятельно видеть следствия полученных результатов;
 точно представить математические знания в области сложных вычислений в устной и письменной форме.

владеть:

навыками освоения большого объема информации и решения задач (в том числе, сложных);
 навыками самостоятельной работы и освоения новых дисциплин;
 культурой постановки, анализа и решения математических и прикладных задач, требующих для своего решения использования математических подходов и методов случайных графов;
 предметным языком сложных вычислений и навыками грамотного описания решения задач и представления полученных результатов.

3. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю

Примеры задач для домашнего задания.

1) В случайном процессе $\tilde{\Gamma} = (\tilde{\Gamma}(m), m=0, \dots, N)$ для возрастающего свойства Q определим $m^*_{\text{cal } Q} = \min\{m: \tilde{\Gamma}(m) \geq \text{cal } Q\}$. Докажите, что \widehat{m} является пороговой функцией для $\text{cal } Q$ тогда и только тогда, когда $m^*_{\text{cal } Q} = \Theta_{\text{sf } P}(\widehat{m})$, т.е. для любой положительной функции $w(n) \rightarrow \infty$ выполнено

$$\text{sf } P\left(\frac{1}{w(n)} \widehat{m} \leq m^*_{\text{cal } Q} \leq w(n) \widehat{m}\right) \rightarrow 1.$$

1.

$$\text{sf } P\left(\frac{1}{w(n)} \widehat{m} \leq m^*_{\text{cal } Q} \leq w(n) \widehat{m}\right) \rightarrow 1.$$

2) Докажите, что в равномерной модели случайных подмножеств для монотонного свойства $\text{cal } Q$ существует точная пороговая функция тогда и только тогда, когда

$$\frac{m^*_{\text{cal } Q}}{m(1/2; n)} \stackrel{\text{sf } P}{\rightarrow} 1.$$

$$\text{sf } P\left(\frac{m^*_{\text{cal } Q}}{m(1/2; n)} \stackrel{\text{sf } P}{\rightarrow} 1\right) \rightarrow 1.$$

3). Пусть X – число пар непересекающихся треугольников в случайном графе $G(n, p)$. Пусть $np \rightarrow c > 0$. Найдите предельное распределение случайной величины X с ростом n .

4). Пусть $G = \{1, \dots, n\}$. Найдите пороговую вероятность в $G(n, p)$ для свойства содержать арифметическую прогрессию длины k .

5) Пусть $np \rightarrow c$, $c > 1$. Докажите, что с вероятностью, стремящейся к 1, гигантская компонента является единственной сложной компонентой в случайном графе $G(n, p)$.

6) Докажите, что в модели $G(\lambda)$ максимальный размер древесной компоненты имеет порядок $\Omega_{\text{sf } P}(n^{2/3})$, т.е. для любой $w(n) \rightarrow 0$ в случайном графе найдется древесная компонента размера не меньше $n^{2/3} w(n)$.

Формула оценки

Студент решает задачи из домашнего задания, каждая задача дает 0,5 балла к оценке. Зачет проходит в форме письменного опроса на знание формулировок и определений из программы курса, в рамках задания можно набрать 4 балла.

4. Перечень типовых (примерных) вопросов и тем для проведения промежуточной аттестации обучающихся

1. Модели случайных графов. Классические модели: биномиальная и равномерная. Графовые случайные процессы. Общая теория случайных подмножеств, биномиальная и равномерная модели.

2. Монотонные свойства конечных подмножеств. Примеры. Лемма о монотонности вероятности обладания монотонным свойством для случайного подмножества. Выпуклые свойства, примеры.
3. Асимптотическая эквивалентность моделей $\Gamma(p)$ и $\Gamma(m)$: одинаковое асимптотическое поведение вероятности обладания свойством для случайных подмножеств в этих моделях. Две леммы и итоговое следствие для монотонных свойств.
4. Пороговые вероятности и пороговые функции обладания монотонными свойствами случайным подмножеством. Критерий того, что данная функция является пороговой вероятностью для монотонного свойства Q . Теорема о существовании пороговой вероятности для произвольного монотонного свойства случайных подмножеств.
Определение точной пороговой вероятности для монотонного свойства, примеры.
5. Малые подграфы в случайном графе $G(n, p)$. Функция $m(G)$, сбалансированные и строго сбалансированные графы, примеры. Леммы о среднем количестве и дисперсии числа подграфов случайного графа $G(n, p)$, изоморфных данному фиксированному графу G . Теорема о пороговой вероятности появления подграфа случайного графа $G(n, p)$, изоморфного данному фиксированному графу G .
6. Метод моментов. Достаточное условие того, что случайная величина однозначно определяется своими моментами. Примеры таких случайных величин. Плотность и относительная компактность семейства вероятностных мер в метрическом пространстве. Теорема Прохорова, следствие из нее. Многомерный метод моментов.
7. Пуассоновская предельная теорема для числа подграфов случайного графа $G(n, p)$, изоморфных данному фиксированному строго сбалансированному графу G . Многомерное обобщение пуассоновской предельной теоремы. Центральная предельная теорема для числа подграфов случайного графа $G(n, p)$, изоморфных данному фиксированному графу G .
8. Эволюция случайного графа $G(n, p)$. Случай $np \rightarrow 0$: максимальный размер и структура компонент связности. Предельные теоремы для числа компонент фиксированного размера.
19. Эволюция случайного графа $G(n, p)$. Случай $np = c \in (0, 1)$: теорема о максимальном размере компоненты связности. Сложные и унициклические компоненты в таком графе — предельные теоремы для числа таких компонент. Общее число вершин в унициклических компонентах.
10. Эволюция случайного графа $G(n, p)$. Случай $np = c > 1$. Ветвящиеся процессы Гальтона-Ватсона. Уравнение для нахождения вероятности вырождения. Теорема о вероятности вырождения ветвящегося процесса. Теорема о размере максимальной связной компоненты случайного графа. Центральная предельная теорема для размера максимальной связной компоненты.
11. Эволюция случайного графа $G(n, p)$. Максимальный размер унициклических и сложных компонент. Асимптотический порядок размера максимальной древесной компоненты случайного графа. Лемма об отсутствии сложных компонент маленького размера. Ограниченность максимальной сложности компоненты в случайном графе. Следствие: количество, размер и сложность сложных компонент.
12. Свойства первого порядка в случайных графах.
13. Законы нуля или единицы.

Критерии оценивания

- оценка «отлично (10)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений
- оценка «отлично (9)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений
- оценка «отлично (8)» выставляется студенту, показавшему всесторонние систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение применять их на практике при решении конкретных задач, и правильное обоснование принятых решений
- оценка «хорошо (7)» выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;

- оценка «хорошо (6)» выставляется студенту, если он знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «хорошо (5)» выставляется студенту, если он знает материал, и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «удовлетворительно (4)» выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;
- оценка «удовлетворительно (3)» выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет фрагментарно основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;
- оценка «неудовлетворительно (2)» выставляется студенту, который не знает большей части основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубые ошибки в формулировках основных понятий дисциплины и не умеет использовать полученные знания при решении типовых практических задач
- оценка «неудовлетворительно (1)» выставляется студенту, который не знает формулировок основных понятий дисциплины.

5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности

Во время проведения дифференцированного зачета обучающиеся могут пользоваться программой дисциплины.